

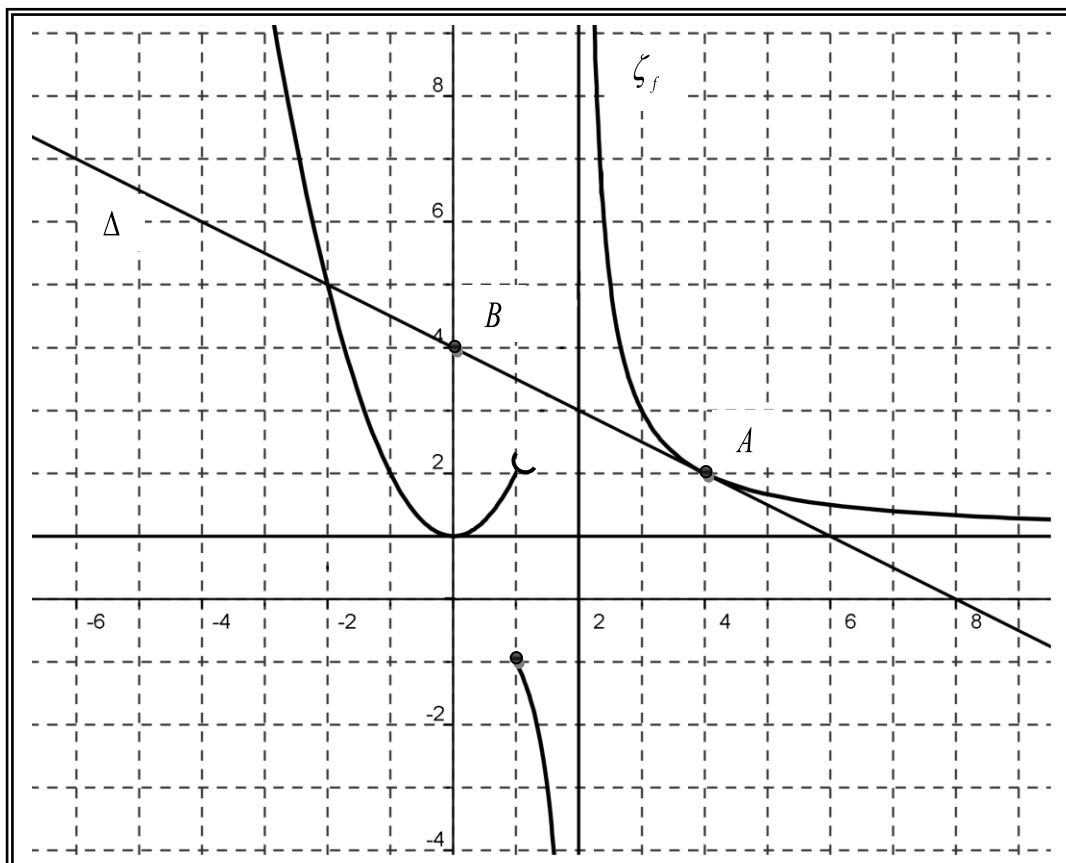


3<sup>ème</sup> Tech : T<sub>3</sub>  
Durée : 2 heures  
Date : le 06 / 12 / 2006  
Coefficient : 3

## Devoir de Synthèse N°1 Mathématiques

### Exercice N°1 : ( 5 pts)

La courbe  $\zeta_f$  ci-contre représente une fonction  $f$ .



**Les réponses seront données avec la précision permise par le graphique**

La droite  $\Delta$  représente la tangente à  $\zeta_f$  au point A.

- 1) Déterminer le domaine de définition  $D_f$
- 2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  ;  $f(1)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ .
- 3) Compléter par vrai ou faux :
  - $f$  est continue à droite en 1 : .....
  - $f$  est continue à gauche en 1 : .....
  - $f$  est continue en 1 : .....
  - $f$  est dérivable en 1 : .....
- 4) Donner le domaine de continuité de  $f$ .
- 5) a – Déterminer une équation de la droite  $\Delta$ .  
b – En déduire  $f'(4)$ .

Exercice N°2 : ( 10 pts)

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} & \text{si } x \in ]-\infty; 2[ \\ f(x) = \sqrt{4x + 1} & \text{si } x \in ]2; +\infty[ \\ f(2) = 3 \end{cases}$$

- 1) a – Déterminer le domaine de définition  $D_f$ .  
b – Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $f(0)$  et  $f(3)$ .
- 2) a – Etudier la continuité de  $f$  à droite en 2.  
b – Montrer que  $f$  est continue à gauche en 2.  
c – Que peut-on déduire de la continuité de  $f$  en 2 ? Justifier.
- 3) a – Justifier la continuité de  $f$  sur chacun des intervalles  $]-\infty; 2[$  et  $]2; +\infty[$ .  
b – En déduire le domaine de continuité de  $f$ .
- 4) a – Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2} = \frac{2}{3}$ .  
b – En déduire que  $f$  est dérivable à droite en 2. Puis écrire une équation de la demi tangente  $T$  à  $\zeta_f$  au point d'abscisse 2.  
c – Montrer que  $f$  est dérivable à gauche en 2.  
d –  $f$  est elle dérivable en 2 ? Justifier.
- 5) Soit  $D$  la droite d'équation  $y = ax + b$   
Déterminer les réels  $a$  et  $b$  sachant que  $D$  est perpendiculaire à  $T$  au point d'abscisse 6.

Exercice N°3 : ( 10 pts)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$

- 1) a – Calculer  $f(0)$  ;  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et  $f\left(\frac{25\pi}{6}\right)$ .  
b – Montrer que  $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{3}{2}$ .
- 2) a – Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}$ .  
b – Montrer alors que :  $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$   
c – En déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

*Bon travail*